ΘΕΩΡΗΜΑ (Ιδιότητες ολοκληρώσιμων συναρτήσεων)

Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$ κλειστό ορθογώνιο και $f, g : A \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις, $a \in \mathbb{R}$. Τότε:

(α) $f+g$ ολοκληρώσιμη με $\int_A (f+g) = \int_A f + \int_A g$

(β) $a \cdot f$ ολοκληρώσιμη με $\int_A (a \cdot f) = a \cdot \int_A f$

(γ) $f \leq g \Rightarrow \int_A f \leq \int_A g$

(δ) $|f|$ ολοκληρώσιμη με $\left| \int_A f \right| \leq \int_A |f|$

(ε) $f \cdot g$ ολοκληρώσιμη

~~ΑΠΟΔΕΙΞΗ~~

Κριτήριο του Riemann:

Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$ κλειστό ορθογώνιο και $f : A \to \mathbb{R}$ φραγμένη. Τότε f ολοκληρώσιμη $\Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists P \in \mathcal{P}(A)) : U(P,f) - L(P,f) < \varepsilon$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

($\Rightarrow$) Έστω $\varepsilon > 0$. Από τον ορισμό των L_f και U_f

$(\exists P, P' \in \mathcal{P}(A))$ έτσι ώστε
$U(P,f) < Uf + \frac{\varepsilon}{2}$ και $\mathcal{L}(P',f) > \mathcal{L}f - \frac{\varepsilon}{2}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Για μια κοινή εκλέπτυνση P'' των P, P'
(δηλ. η P'' επίσης διαμέριση με $P'' \supset P, P'$)
Άρα, $U(P'',f) - L(P'',f) \leq U(f,P) - \mathcal{L}(P',f) <$
$< Uf + \frac{\varepsilon}{2} - \left(\mathcal{L}f - \frac{\varepsilon}{2}\right) = \cancel{Uf} - \cancel{\mathcal{L}f} + \varepsilon = \varepsilon$

($\Leftarrow$): Από τον ορισμό των $\mathcal{L}f, Uf$ και μια ιδιότητα $\mathcal{L}(P,f)$, $U(P,f)$ έχουμε, $0 \leq Uf - \mathcal{L}f \leq$
$\leq U(P',f) - \mathcal{L}(P',f)$, $\forall P \in \mathcal{P}(A)$, όπως Uf το $\inf U(P',f)$
και $\mathcal{L}f$ το $\sup \mathcal{L}(P',f)$
Άρα, από το δεξί μέρος (στην εκφώνηση) έχουμε
$(\forall \varepsilon > 0)$ $0 \leq Uf - \mathcal{L}f < \varepsilon \Rightarrow Uf = \mathcal{L}f \Rightarrow$ ολοκληρώσιμη.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΤΟΥ ~~Α~~ (α) ΑΠΟ ΤΟ ΠΙΣΩ ΘΕΩΡΗΜΑ:

$(\forall P \in \mathcal{P}(A))(\forall S \in S_P)(\forall x \in S)$:

$\inf(f|S) + \inf(g|S) \leq f(x) + g(x) \leq \sup(f|S) + \sup(g|S)$

$(\forall P \in \mathcal{P}(A))(\forall S \in S_P)$: $\inf(f|S) + \inf(g|S) \leq \inf(f+g)|S \leq$
$\leq \sup(f+g)|S \leq \sup(f|S) + \sup(g|S)$
πολ/ζουμε την ανισότητα με $V(S)$ και αθροίζουμε παντού:
$(\forall P \in \mathcal{P}(A))$: $\mathcal{L}(P,f) + \mathcal{L}(P,g) \leq L(P, f+g) \leq \mathcal{L}_{f+g} \leq$
$\leq U_{f+g} \leq U(f+g, P) \leq U(P,f) + U(P,g)$

Έχουμε, από το Κριτήριο Riemann ότι
$(\forall \varepsilon > 0)(\exists P', P'' \in \mathcal{P}(A))$ $\begin{cases} U(P',f) - L(P',f) < \frac{\varepsilon}{2} \\ U(P'',g) - L(P'',g) < \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$ $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ για μια κοινή εκλέπτυνση P του P'' και P', έχουμε:
$U(P,f) - L(P,f) < \frac{\varepsilon}{2}$ και $U(P,g) - L(P,g) < \frac{\varepsilon}{2}$

$\Rightarrow (\forall \varepsilon>0)(\exists P \in \mathcal{P}(A))$:

$$-\varepsilon < \mathcal{L}(P,f)+\mathcal{L}(P,g)-U(P,f)-U(P,g) \leq \mathcal{L}_{f+g}-U_f-U_g \leq$$
$$\leq U(P,f)+U(P,g)-\mathcal{L}(P,f)-\mathcal{L}(P,g) < \varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\varepsilon \leq \mathcal{L}_{f+g} - U_f - U_g \leq U_{f+g} - \mathcal{L}_f - \mathcal{L}_g < \varepsilon$$

Τεστ

ΝΔΟ εαν $f: A \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη, $A \subset \mathbb{R}^n$ κλειστό ορθογώνιο,

$$\inf f \cdot v(A) \leq \int_A f \leq \sup f \cdot v(A).$$